

Διοτλημ 1300
19/11/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΙΣΟΔΕΙΣ

(1)

(E0): $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, x \in I$

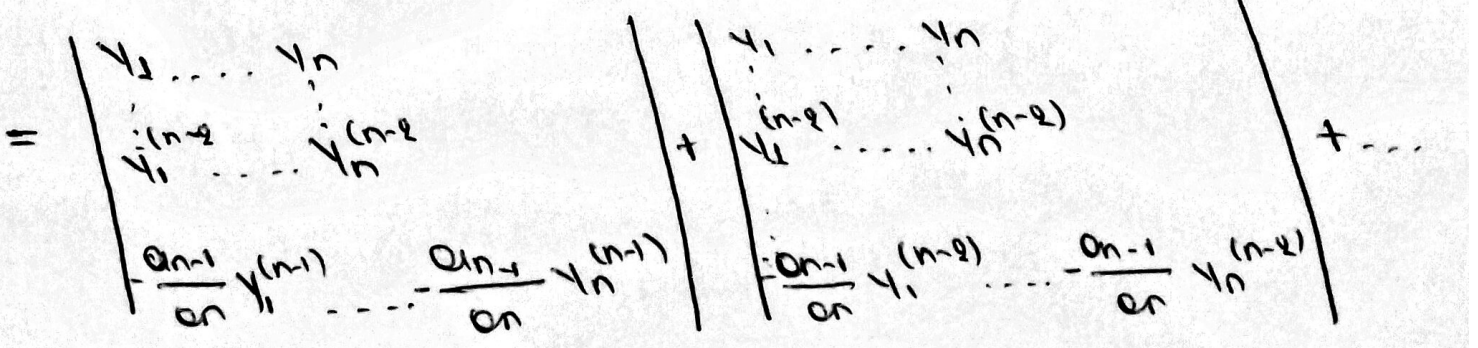
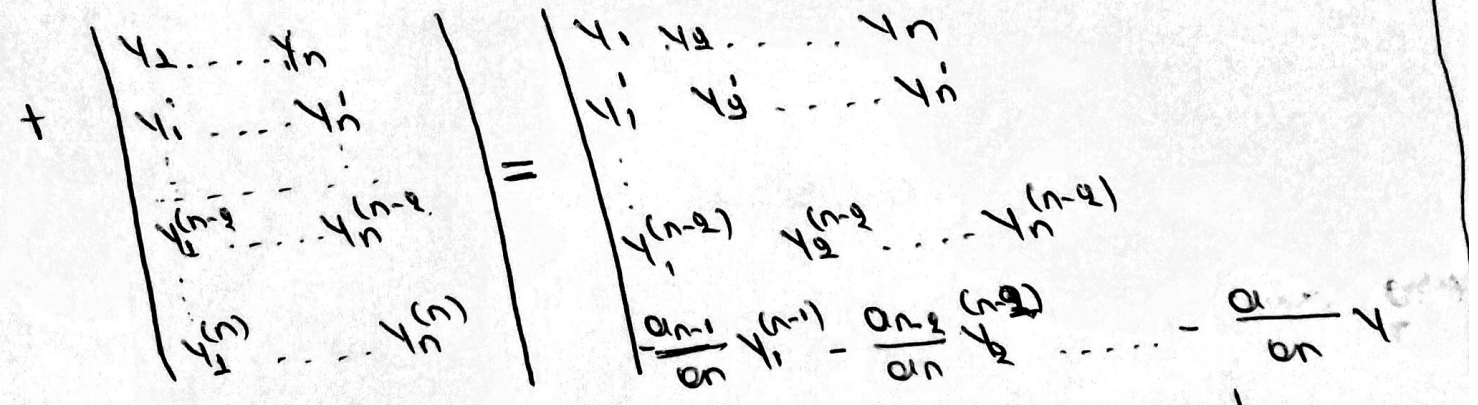
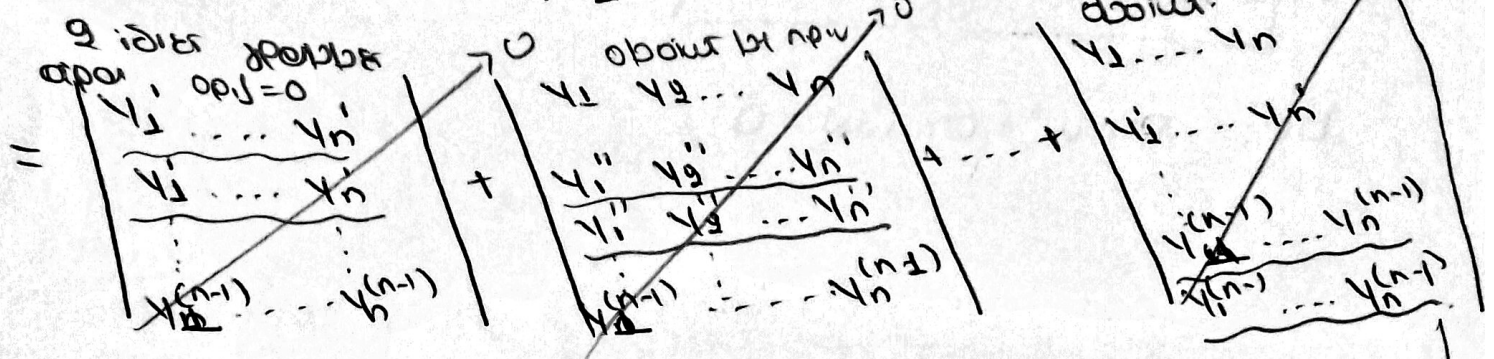
(G): $y(x_0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = c_n$

Θεώρημα: Αν y_1, \dots, y_n λύσεις της (E0) για $x_0 \in I$, τότε
 $\omega(y_1, \dots, y_n)(x) = \omega(y_1, \dots, y_n)(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)} ds}, x \in I$

Απόδ

Για $x \in I$ έχουμε:

$\omega(y_1, \dots, y_n)'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \dots$



$$+ \dots + \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ \frac{0}{\alpha} & \dots & \frac{0}{\alpha} \end{vmatrix}$$

||

$$= - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{w'(x) = - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} w(x)}$$

$$\text{or: } \alpha_n w' + \alpha_{n-1} w = 0$$

π.χ.

$$\begin{aligned}
 y_1(x) &= e^x \\
 y_2(x) &= e^x(x-1) \\
 y_3(x) &= 2e^x - e^{2x}
 \end{aligned}$$

} Λίστα

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$$

$\omega(y_1, y_2, y_3)$?

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^x(x-1) & 2e^x - e^{2x} \\ e^x & e^x(x-1) + e^x & 2e^x - 2e^{2x} \\ e^x & e^x(x-1) + e^x + e^x & 2e^x - 4e^{2x} \end{vmatrix}$$

Υπολογίστε την ορίζουσα ως εξής εμπειρο:

$$\omega(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot e^{-\int_0^x \frac{4}{1} ds}$$

Ορισμός: Ένα σύνολο $\{y_1, \dots, y_n\}$ n-γραμμικών αλγεβρικών τριβών της (E0) ονομάζεται Βασικό σύνολο τριβών.

Παράδειγμα: Υπάρχουν βασικά σύνολα τριβών της (E0).

Απόδ.

Θέλουμε ως τριβές y_1, \dots, y_n του π.Α.Τ. (E0) - (1)

- $y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0, \dots, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$: (1)
- $y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1, \dots, y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$: (2)
- \vdots
- $y_n(x_0) = 0, y_n'(x_0) = 0, \dots, y_n^{(n-2)}(x_0) = 0, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$

υπάρχει παραρτήμα ότι:

$$\omega(\gamma_1, \dots, \gamma_n)(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

οπότε $\omega(\gamma_1, \dots, \gamma_n)(x) \neq 0, \forall x \in I$

Παραρτήμα: Αν έχω ένα βασικό σύστημα \mathcal{B} της E_0 τότε για οποιαδήποτε $\gamma \in C^{(n)}(I)$ είναι άκρον της $E_0 \Leftrightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ βασισμικούς συντελεστές με

$$\gamma(x) = (c_1 \gamma_1(x) + \dots + c_n \gamma_n(x))$$

Απόδ.

(\Leftarrow) Ο. Υπερθεώρημα.

(\Rightarrow) Αν είναι $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ βασικό σύστημα της (E_0) και γ ένα άκρον. (ενεργούν οι γ είναι άκρον τότε ισχύει

$$\gamma(x_0) = b_1, \gamma'(x_0) = b_2, \dots, \gamma^{(n-1)}(x_0) = b_n \text{ με:}$$

$$|b_1| + \dots + |b_n| \neq 0.$$

Θέσω το γραμμικό σύστημα $(c_1 \gamma_1(x_0) + \dots + c_n \gamma_n(x_0) = b_1$

$$(S): \begin{cases} c_1 \gamma_1'(x_0) + \dots + c_n \gamma_n'(x_0) = b_2 \\ \vdots \\ c_1 \gamma_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n \gamma_n^{(n-1)}(x_0) = b_n \end{cases}$$

υπάρχει παραρτήμα σε m ορίσματα D του γραμμ. pm ο βασικός $n \times n$ συντελεστές είναι m

$$D = \omega(\gamma_1, \dots, \gamma_n)(x_0) \neq 0 \text{ (ενεργούν } \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \text{ B.G. } \mathcal{B} \text{ της } E_0)$$

Από το (S) έχει ως λύσεις ένα άκρον c_1, \dots, c_n
Η συνάρτηση $\tilde{\gamma}(x) = c_1 \gamma_1(x) + \dots + c_n \gamma_n(x)$ είναι άκρον της (E) . (Α. Υπερθεώρημα)

Enigmas από το (S) είναι ότι:

οδηγεί στην λύση.
Θα ισχύει ότι $y \equiv \tilde{y}$

$y(x_0) = b, y'(x_0) = b, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n$

Απόδειξη m y είναι άγνωστο τμή (Ε) να υπολογιστεί τις ίδιες συνθήκες με την y.

Αν $y = d_1 y_1 + \dots + d_n y_n$ για κάποια d_1, \dots, d_n τ.ω :

$(d_1 - c_1) y_1(x) + \dots + (d_n - c_n) y_n(x) = 0, x \in J$

οδηγεί
στην
α.
β.
γ.

$d_1 = c_1$
 $d_2 = c_2$
 \vdots
 $d_n = c_n$ //

Παράδειγμα 3:

$x^3 y'' - 4x^2 y' + 8xy - 8y = 0 // y(x) = x^n$

Να εντοπίσω την παραπάνω εξίσωση.

Λύση

Θα υποθέσουμε τις δοσμένες $y(x) = x^n$

Έχω λοιπόν:

$x^3 n(n-1)(n-2)x^{n-3} - 4x^2 n(n-1)x^{n-2} + 8xn x^{n-1} - 8x^n = 0 \Rightarrow$

$x^n [n(n-1)(n-2) - 4n(n-1) + 8n - 8] = 0 \Rightarrow$

$(n-1) [n(n-2) - 4n + 8] = 0$

$n=1$

$-4(n-2)$
 $(n-2)(n-4) = 0 \Rightarrow$
 $n=2$ ή $n=4$

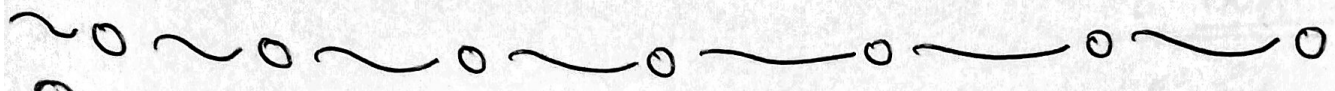
Από Εξω 3 τίκτες: $y_1(x) = x$
 $y_2(x) = x^2$
 $y_3(x) = x^4$

Νέο τέρμα όλων αυ είναι γρ. ανεξ. Γι' αυτό:

$$W(y_1, y_2, y_3)(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2 & 12x^2 \end{vmatrix}$$

$$W(\dots)(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} \neq 0$$

Από: $y(x) = (1x + 9x^2 + 13x^4), x \neq 0$



Θεώρημα: Αν είναι $y_1, \dots, y_n \in C^{(n)}(I)$ τ.ω

$W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0, \forall x \in I$. Τότε \exists κανονική επίλυση

n -τάξης: $(E_0)^n$ με $\alpha_n = 1$, έτσι ώστε το $\{y_1, \dots, y_n\}$ να είναι ένα β.β.τ. λύσης.

Απόδ

Θεωρού την επίλυση

$$\begin{matrix} (-1)^{n+1} \\ (1) \end{matrix} W(y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)) \begin{vmatrix} y^{(n)} & y^{(n-1)} & \dots & y' & y \\ y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_1' & y_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \dots & y_n' & y_n \end{vmatrix} = 0, x \in I$$

Είναι :

$$\frac{1}{\omega(x)} \left[\omega(x) y^{(n)} - (D_1 \omega) y^{(n-1)} + D_1 D_2 \omega y^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} D_1 \dots D_{n-1} \omega \right]$$

=

* Στην ερώτηση (A) αν βάλω στην ομογενή πηγή y κάποια ομοία ομοία τύπος y_1, y_2, \dots, y_n τότε n ορίσματα θα έχει πάντα 2 ίδιες γραμμές αρα θα είναι 16m με το 16m. Αρα οι y_1, y_2, \dots, y_n θα είναι λύσεις της ερώτησης. Έτσι θα έχω ελαφρώς υπερημ λύσεις.

Για την βασικότητα (Υπόθεση) $y^{(n)} + c_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + c_1 y' + c_0 y = 0$ για $y^{(n)} + d_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + d_1 y' + d_0 y = 0$ θα της αναφέρω υατοί μετμ υαί θα έχω (υατοί ομο γαίτα) $(d_{n-1} - c_{n-1}) + \dots + (d_1 - c_1) + (d_0 - c_0) = 0 \dots$ με ποίτα υατοίτα γτ βασικότητα //

Ακρίβη: $y_1(x), y_2(x) = x e^x$

$$\begin{vmatrix} x & x e^x \\ 1 & e^x + x e^x \end{vmatrix} = -x^2 e^x, x \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x & 1 & 0 \\ x e^x & e^x + x e^x & e^x + x e^x + e^x \end{vmatrix} = 0 \dots$$

* Αν έχω μια εξίσωση της μορφής:

$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ με $\lambda_1 = \dots = \lambda_r$ μια
πυκνωτή ρίζα

τότε με είναι από βεβαιότητα $y = r y_1$
 $z = n'$

τότε μπορούμε να υποβιβάσουμε την παραπάνω εξίσωση
σε $(n-1)$ τάξη.

Θα το δεις σου άμεσα την επίλυση σου.