Διάλεξη 13η

19/11/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$(E_0): a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad x \in I$

$(C): y(x_0) = c_1, \dots\dots, y^{(n-1)}(x_0) = c_n$

Θεώρημα: Αν $y_1, \dots, y_n$ λύσεις της (E_0) και $x_0 \in I$, τότε

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = W(y_1, \dots, y_n)(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)} ds}, \quad x \in I$$

Απόδ.

Για $x \in I$ έχουμε:

$$W(y_1, \dots, y_n)'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}' =$$

2 ίδιες γραμμές άρα ορ. $=0$ — όμοια με πριν — όμοια.

$$= \begin{vmatrix} y_1' & \dots & y_n' \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_1^{(n-1)} - \frac{a_{n-2}}{a_n} y_1 & \dots & \dots & -\frac{a}{a_n} y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_1^{(n-1)} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_1^{(n-2)} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} + \dots$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ \vdots & & \\ -\frac{a_0}{a_n} y_1 & \cdots & -\frac{a_0}{a_n} y_n \end{vmatrix}$$

$=$

$$= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - \frac{a_{n-1}}{a_n} \cancel{\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}} \to 0 - \cancel{\cdots} \to 0$$

$$\Rightarrow \boxed{W'(x) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} W(x)}$$

DE: $a_n W' + a_{n-1} W = 0$

Π.χ.

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = e^x(x-1) \\ y_3(x) = 2e^x - e^{2x} \\ W(y_1, y_2, y_3)\,? \end{array}\right\} \text{λύση} \quad y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^x(x-1) & 2e^x - e^{2x} \\ e^x & e^x(x-1) + e^x & 2e^x - 2e^{2x} \\ e^x & e^x(x-1) + e^x + e^x & 2e^x - 4e^{2x} \end{vmatrix}$$

Υπολογίζω την ορίζουσα ως. σε ένα σημείο:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot e^{-\int_0^x \frac{4}{1} ds}$$

Ορισμός: Ένα σύνολο $\{y_1, \dots, y_n\}$ n-γραμμικώς ανεξαρτ. λύσεων της (ΕΟ) καλείται βασικό σύνολο λύσεων.

Θεώρημα: Υπάρχουν βασικά σύνολα λύσεων της (ΕΟ).

Απόδ.

Θεωρώ τις λύσεις $y_1, \dots, y_n$ του Π.Α.Τ. (ΕΟ)-(C_i)

με $y_1(x_0) = 1,\ y'(x_0) = 0 = \dots = y_1^{(n-1)}(x_0) = 0 : (C_1)$

$y_2(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1, \dots\ y_2''(x_0) = \dots = y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 : (C_2)$.

$\vdots$

$y_n(x_0) = 0,\ y_n'(x_0) = 0, \dots,\ y_n^{(n-2)}(x_0) = 0,\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$

και παρατηρώ ότι:

$$W(y_1,\dots,y_n)(x_0)=\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

άρα $W(y_1,\dots,y_n)(x)\neq 0,\ \forall x\in I$

Θεώρημα: Αν έχω ένα βασικό σύνολο λύσεων της E_0 τότε μια συνάρτηση $y\in C^{(n)}(I)$ είναι λύση της $E_0 \Leftrightarrow$ $\exists\, c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ μοναδικά ορισμένα με

$$y(x)=c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)$$

Απόδ

($\Leftarrow$) Θ. υπέρθεσης.

($\Rightarrow$) Ας είναι $\{y_1,\dots,y_n\}$ βασικό σύνολο της (E_0) και y μια λύση. Επειδή οι y είναι λύση τότε ισχύει

$y(x_0)=b_1,\ y'(x_0)=b_2,\ \dots,\ y_1^{(n-1)}(x_0)=b_n$ με:

$|b_1|+\dots+|b_n|\neq 0.$

Θεωρώ το γραμμικό σύστημα

$$(S):\ \begin{cases} c_1y_1(x_0)+\dots+c_ny_n(x_0)=b_1\\ c_1y_1'(x_0)+\dots+c_ny_n'(x_0)=b_2\\ \vdots\\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\dots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=b_n\end{cases}$$

και παρατηρώ ότι η ορίζουσα D του γραμμ. $n\times n$ συστήματος είναι η

$D=W(y_1,\dots,y_n)(x_0)\neq 0$ (επειδή $\{y_1,\dots,y_n\}$ Β.Σ. λύσεων)

Άρα το (S) έχει ακριβώς μια λύση $c_1,\dots,c_n$

Η συνάρτηση $\tilde{y}(x)=c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)$ είναι λύση της (E). (Θ. υπέρθεσης)

Επίσης από το (S) έπεται ότι:

$\tilde{y}(x_0)=b, \quad \tilde{y}'(x_0)=b, \dots, \tilde{y}^{(n-1)}(x_0)=b_n.$

Δηλαδή η $\tilde{y}$ είναι λύση της (E_0) που ικανοποιεί τις ίδιες συνθήκες με την y.

Αν

$y=d_1y_1+\dots+d_ny_n$ για κάποια $d_1,\dots,d_n$ τ.ω:

$(d_1-c_1)y_1(x)+\dots+(d_n-c_n)y_n(x)=0, \quad x\in J$

Άρα τα $y_1,\dots,y_n$ είναι γρ. ανεξ. $\Rightarrow$

$d_1=c_1$

$d_2=c_2$

$\vdots$

$d_n=c_n$ //.

Έξω: αφού είναι μονοσ. θα ισχύει ότι $y\equiv\tilde{y}$

Παράδειγμα 3:

$$x^3y'''-4x^2y''+8xy'-8y=0 \quad // \quad y(x)=x^n.$$

Να επιλύσω την παραπάνω εξίσωση.

Λύση

Θα αναζητήσω λύσεις της μορφής $y(x)=x^n$.

Έχω λοιπόν:

$$x^3n(n-1)(n-2)x^{n-3}-4x^2n(n-1)x^{n-2}+8xnx^{n-1}-8x^n=0 \Rightarrow$$

$$x^n[n(n-1)(n-2)-4n(n-1)+\underbrace{8n-8}_{8(n-1)}]=0 \Rightarrow$$

$$(n-1)[n(n-2)\underbrace{-4n+8}_{-4(n-2)}]=0$$

$\boxed{n=1.}$

$$(n-2)(n-4)=0 \Rightarrow$$

$\boxed{n=2}$ ή $\boxed{n=4}$

Άρα

Έχω 3 λύσεις: $y_1(x)=x$

$y_2(x)=x^2$

$y_3(x)=x^4$

Δεν ξέρω όλες αν είναι γρ. ανεξ. Γι' αυτό:

$$W(y_1,y_2,y_3)(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2 & 12x^2 \end{vmatrix}$$

$$W(..)(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} \neq 0$$

Άρα: $\boxed{y(x)=c_1x+c_2x^2+c_3x^4 \quad , x\neq 0}$

~o~o~o~o~o~o~o

<u>Θεώρημα</u>: Ας είναι $y_1,\dots,y_n \in C^{(n)}(I)$ τ.ω $W(y_1,\dots,y_n)(x)\neq 0, \forall x\in I$. Τότε $\exists$ <u>γραμμική εξίσωση</u> n-τάξης: $(E_0)^n$ με $a_n=1$, έτσι ώστε το $\{y_1,\dots,y_n\}$ να είναι ένα θ.σ.λ. αυτής.

<u>Απόδ.</u>

Θεωρώ την εξίσωση

$$\frac{(-1)^{n+1}}{W(y_1(x_0),\dots,y_n(x_0))}\begin{vmatrix} y^{(n)} & y^{(n-1)} & \dots & y' & y \\ y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_1' & y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \dots & y_n' & y_n \end{vmatrix}=0, \ x\in I$$

Είναι:

$$\frac{1}{W(x)}\left[W(x)y^{(n)} - (D_{1n})y^{(n-1)} + D_{13}y^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1}D_{1n}\, y\right]$$

$= \dots$

(*) Στην εξίσωση (A) αν βάλω στην άγνωστη μεταβ. y οποιοια απ' τις τιμές $y_1, y_2, \dots, y_n$ τότε η ορίζουσα θα έχει πάντα 2 ίδιες γραμμές άρα θα είναι ίση με το μηδέν. Άρα οι $y_1, y_2, \dots, y_n$ θα είναι λύσεις της εξίσωσης. Έτσι θα έχω εξασφαλίσει ύπαρξη λύσης.

Για την μοναδικότητα: (υπόδειξη) θα πάρω 2 εξισώσεις:
$y^{(n)} + c_n y^{(n-1)} + \dots + c_1 y' + c_0 y = 0$ και $y^{(n)} + d_n y^{(n-1)} + \dots + d_1 y' + d_0 y = 0$
θα της αφαιρέσω κατά μέλη και θα έχω (ύστερα από πράξεις)
$(d_n - c_n) + \dots + (d_1 - c_1) + (d_0 - c_0) = 0 \dots$ με πράξεις καταλήγω σε μοναδικότητα //

Άσκηση: $y_1(x), y_2(x) = xe^x$.

$$\begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix} = -x^2e^x, \quad x \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x & 1 & 0 \\ xe^x & e^x + xe^x & e^x + xe^x + e^x \end{vmatrix} = 0 \quad \dots$$

(*) Αν έχω μια εξίσωση της μορφής:

$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ με $y_1 =$ να είναι μια γνωστή λύση

τότε με έναν από μετασχηματισμό $\underbrace{y = n y_1}_{z = n'}$

τότε μπορεί να υποβιβάσει την παραπάνω εξίσωση σε $(n-1)$ τάξη.

Θα το δούμε σου θεωρητικά την επόμενη φορά.